

REGULACION DE SISTEMAS CON RETARDOS MEDIANTE UN ENFOQUE DISCRETO APROXIMADO: APLICACION A SISTEMAS CON RECICLO

DELAY SYSTEMS REGULATION BY AN APPROXIMATE DISCRETE APPROACH: APPLICATION TO RECYCLE SYSTEMS

B. Del Muro-Cuellar ^{1*} y M. Velasco-Villa ²

¹ Instituto Mexicano del Petróleo. Programa de Investigación en Matemáticas Aplicadas y Computación
Eje Central Lázaro Cárdenas # 152, 07730, D. F. México.

² CINVESTAV-IPN. Departamento de Ingeniería Eléctrica. Sección de Mecatrónica
Apdo. Postal 14-740, 07000, D. F., México.

Resumen

En este trabajo se aborda el problema de regulación para una clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo con retardos de tiempo tanto en la señal de entrada como en el estado y se trata el caso particular de los sistemas con reciclaje. Se propone una metodología para obtener una representación discreta (aproximada) del modelo continuo original. Con base en el modelo discreto se presenta un esquema de control mediante reubicación de polos, el cual es aplicado al modelo continuo original. Por medio de simulaciones digitales se muestra la eficacia del esquema propuesto al aplicarse a un proceso con reciclaje.

Palabras clave: sistemas con reciclaje, regulación, modelado en tiempo discreto, control en tiempo discreto.

Abstract

In this work it is analyzed the regulation problem for a class of linear time invariant systems with time delays at the input signal and at the state and it is considered in particular the case of the recycle systems. It is proposed a methodology intended to obtain a discrete representation (approximate) of the original continuous system. By considering the discrete model it is presented a pole placement control scheme which is applied to the continuous time model. The performance of the proposed scheme is shown by means of digital simulations over a recycle system.

Keywords: recycle systems, regulation, discrete time modeling, discrete time control.

1. Introducción

Es conocido que los sistemas con reciclaje presentan características que los hacen particularmente difíciles de controlar (Luyben, 1993). Por ejemplo, efectos como el llamado “bola de nieve” se producen fácilmente en estos sistemas cuando pequeñas variaciones en la alimentación producen un incremento considerable en el flujo de reciclaje. Así mismo, es común encontrar retardos de transporte de magnitud importante en este tipo de plantas. En general, los procesos que contienen elementos que involucran retardos de transporte son muy comunes en la práctica y particularmente en la industria química (Luyben, 2001). En este trabajo se considera

una clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo la cual presenta retardos de tiempo tanto en la señal de entrada como en el estado. Esta clase de sistemas ha sido ampliamente abordada en la literatura desde diferentes perspectivas (Malek y Jamshidi, 1987). Desde un punto de vista teórico se ha analizado ampliamente la estabilidad de esta clase de sistemas obteniéndose diferentes criterios dependientes o independientes de los valores de los retardos de tiempo (Mori y Kokame, 1989; Wang, 1992), obteniéndose condiciones necesarias y suficientes que aseguran la estabilidad del sistema basadas en pruebas prácticas sobre regiones específicas en el plano complejo (Arunawatwong, 1996).

*Autor para la correspondencia: E-mail: bdelmuro@imp.mx.
Te. (55) 91757571.

Por otra parte, diferentes trabajos han fijado su atención en el análisis de problemas como desacoplamiento a perturbaciones. Por ejemplo en Conte y Perdon, 1995 los autores presentan condiciones para la solución del problema por medio de un análisis geométrico del sistema mediante la consideración del operador de retardo. Así mismo, el problema de desacoplamiento entrada-salida ha sido tratado en Iwai y col, (1978); Tzafestas y Paraskevopoulos, (1973).

El estudio de los problemas clásicos de control, como regulación o seguimiento de trayectorias han mostrado la necesidad, en términos generales, de la utilización de valores futuros de los estados en las soluciones respectivas. Este problema de causalidad ha tenido como consecuencia la caracterización de las condiciones bajo las cuales un problema de control presenta una solución mediante una ley no anticipativa Conte y Perdon, (1995) en el caso del problema de desacoplamiento de perturbaciones.

Diferentes trabajos han sido dedicados al estudio de la estimación de valores futuros de los estados a ser utilizados en soluciones de problemas específicos que no pueden ser resueltos mediante la utilización de leyes de retroalimentación causal. En este sentido, diferentes esquemas basados en el llamado predictor de Smith (Smith, 1957) han sido propuestos considerado sistemas lineales con retardos solo en la señal de entrada (Astrom y col. 1994; Watanabe y Ito, 1981) o sistemas incluyendo retardos de tiempo tanto en la señal de entrada como en el estado (Maza-Casas y col., 1999; Velasco-Villa, 2003). Este enfoque generalmente conduce a la obtención de esquemas de control aproximado que proveen una solución basada en retroalimentaciones causales, con la ventaja de eliminar la consideración de los retardos existentes en el sistema, para de esta forma considerar modelos de dimensión finita (libres de retardo) en la obtención de las soluciones.

En este trabajo se propone una metodología para la obtención de un modelo discreto que corresponde en forma aproximada con el comportamiento del sistema original en los instantes de muestreo. El modelo obtenido puede formularse como una representación en variables de estado discreta (ecuaciones de diferencias) o como una función transferencia en la variable compleja z . Asimismo, se propone una metodología para el diseño de un controlador que reubica los polos del sistema basado en el modelo discreto obtenido.

Para la validación de los resultados se ha optado por su aplicación, mediante simulaciones digitales, en un sistema con reciclo. En este ejemplo se muestra la eficacia de la solución propuesta.

El presente trabajo se organiza de la siguiente manera: En la Sección 2 se presenta la clase de sistemas a considerar. En la Sección 3 se describe la metodología propuesta para la obtención del modelo discreto mientras que en la Sección 4 se presenta el sistema con reciclo y se obtiene su sistema aproximado discreto, lo que representa la aportación principal de este trabajo. En la Sección 5 se presenta la estrategia de control utilizada en el sistema con reciclo y se muestra la eficacia del controlador discreto, diseñado a partir del modelo aproximado, mediante simulaciones digitales. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Clase de sistemas con retardos de tiempo

Considérese la clase de sistemas lineales e invariantes en el tiempo que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1x(t-h) \\ &\quad + Bu(t) + B_1u(t-\tau) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(t_0 - \varphi) &= \phi(\varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

Donde $h \geq 0$ es un retardo de tiempo constante asociado al estado, $\tau \geq 0$ es un retardo de tiempo constante asociado a la señal de entrada, $\phi(\varphi)$ es una función continua de condiciones iniciales con $h \leq \varphi \leq 0$. El vector de estados es $x \in R^n$, la entrada $u \in R$ y la salida $y \in R$. Finalmente, las matrices $A, A_1 \in R^{n \times n}$, $B, B_1 \in R^{n \times 1}$ y $C \in R^{1 \times n}$ se suponen conocidas.

En la clase de sistemas considerados se supone por simplicidad de la presentación que el sistema es una entrada una salida. Por otra parte, se consideran retardos de tiempo tanto en el estado como en la señal de entrada.

La función de transferencia clásica del sistema (1) se obtiene mediante la aplicación directa de la transformada de Laplace, lo cual produce:

$$sX(s) = (A + A_1 e^{-hs})X(s) + (B + B_1 e^{-\tau s})U(s)$$

$$Y(s) = CX(s),$$

de donde es posible obtener,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - [A + A_1 e^{-hs}])^{-1} \times (B + B_1 e^{-\tau s}).$$

Esta función de transferencia puede escribirse en términos de quasipolinomios en la variable s . En particular se tiene la característica de contar con un número infinito de polos, los cuales están dados por las soluciones de:

$$\det(sI - A - A_1 e^{-hs}) = 0. \quad (2)$$

Esta propiedad hace que una reubicación de polos por retroalimentación no sea una técnica posible de utilizar (al menos de manera exacta). En términos generales, el diseño de controladores para la

clase de sistemas considerados no es una tarea trivial. El objetivo del presente trabajo es proponer una metodología simple y efectiva que permita la solución del problema de regulación para la clase de sistemas con retardo de tiempo considerada mediante la utilización de controladores en tiempo discreto (digitales). Mediante esta técnica se pretende que el controlador sea fácil de implementar evitando los problemas de causalidad que pudieran aparecer en un diseño clásico.

3. Obtención del modelo

Como se mencionó anteriormente se pretende obtener la solución del problema de regulación mediante un esquema de control discreto. Para tal efecto primero se describirá la obtención de un modelo discreto aproximado del sistema continuo original. Se plantea la obtención de un modelo discreto aproximado ya que la obtención de un modelo discreto exacto no es posible en el caso de un sistema con retardos tanto en la señal de entrada como en los estados. Esto se debe a que para la obtención de un sistema discreto exacto (Franklin y Powell, 1990) se requiere el conocimiento de la matriz fundamental de (1), la cual no es posible obtener para la clase de sistemas considerada (Górecki y Fuksa, 1989; Malek y Jamshidi, 1987).

En el caso de sistemas con retardo de tiempo solo en la señal de entrada (o en la salida) la obtención de su modelo discreto exacto es una tarea simple (la matriz fundamental del sistema se encuentra disponible) pues el llamado teorema de la traslación real permite manejar los retardos en tiempo discreto (transformada z) cuando estos son un múltiplo entero k del periodo de muestreo T , esto es, en el caso de un retardo de τ segundos, se considera $\tau = kT$, produciendo:

$$Z(e^{-kTs} F(s)) = z^{-k} F(z),$$

Donde $Z(G(s))$ denota la transformada en z de la función $G(s)$ y es igual a $G(z)$. La función transferencia muestreada puede obtenerse ya sea a partir del modelo en variables de estado o a partir de la función transferencia original (Franklin y Powell, 1990).

Desgraciadamente, esta metodología no nos permite tratar sistemas con el retardo en el estado de manera directa pues a partir del modelo en variables de estado, como se mencionó anteriormente, no es posible la obtención de la solución explícita del sistema y, por otra parte, a partir de la función transferencia, no es posible encontrar una relación entrada-salida exacta en los instantes de muestreo.

3.1 Modelo discreto aproximado

La clave de la metodología para la obtención del modelo discreto aproximado es considerar al estado retardado como una segunda entrada externa al sistema, la cual pasa a través de un retenedor-muestreador de orden cero como se describe en la Fig. 1.

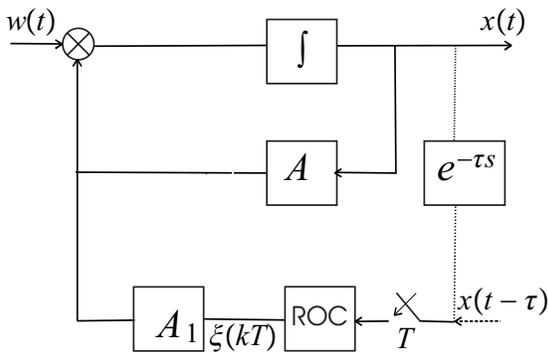


Fig. 1. Esquema general de aproximación.

Este simple hecho, permite obtener un sistema sin retardo en el estado para el cual es posible la obtención del modelo discreto por medio de técnicas ordinarias (solo existen retardos en la señal de entrada) y obtener de esta forma un modelo (ecuación

de diferencias) con 2 entradas (la original y la ficticia) y una salida, que describe el comportamiento del sistema en instantes de muestreo. Una vez obtenido este modelo, procedemos entonces a igualar esta entrada ficticia al estado retardado del sistema, obteniendo de esta manera un modelo discreto aproximado una entrada una salida correspondiente al sistema original, mismo que servirá como base para el diseño del controlador. El esquema descrito en la Fig. 1, produce un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1 \xi(kT) \\ &\quad + Bu(t) + B_1 u(t - \tau) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(t_0 - \varphi) &= \phi(\varphi), \end{aligned}$$

Para el cual es posible mostrar, considerando el método de pasos para ecuaciones diferenciales retardadas (Drive, 1977), que su solución representa una aproximación del sistema original (1).

Con el fin de clarificar los detalles de la aproximación discreta propuesta en este trabajo, considérese un sistema compuesto por dos funciones de transferencia en cascada, $G(s)$ y $H(s)$, como se muestra a continuación:

$$Y(s) = H(s)G(s)U(s) \tag{3}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)U_i(s) \\ U_i(s) &= G(s)U(s) \end{aligned} \tag{4}$$

Donde $Y(s)$ y $U(s)$ son las señales de salida y entrada respectivamente y $U_i(s)$ representa la señal intermedia que va de $G(s)$ a $H(s)$. Si se aplica como entrada del sistema (3) una señal discreta (muestreada) a través de un retenedor de orden cero es posible obtener el siguiente modelo discreto:

$$Y(z) = (1 - z^{-1})z \left[\frac{H(s)G(s)}{s} \right] U(z). \quad (5)$$

El comportamiento de este sistema discreto coincide con el del sistema continuo (3) en forma exacta en los instantes de muestreo, es decir, $y(0)$, $y(T)$, $y(2T)$,...

Considérese ahora el modelo continuo (4) sometido a una entrada muestreada y a través de un retenedor de orden cero, donde adicionalmente se ha considerado que la señal intermedia (continua) también es muestreada y pasa a través de un retenedor de orden cero. Bajo estas condiciones se obtiene el modelo discreto,

$$Y(z) = (1 - z^{-1}) \left[z \left(\frac{H(s)}{s} \right) + z \left(\frac{G(s)}{s} \right) \right] U(z). \quad (6)$$

Nótese que el sistema (6) representa la discretización del sistema descrito en la Fig. 1, el cual es a su vez una aproximación del sistema original (1). Bajo estas condiciones es posible mostrar que el sistema discreto (6) corresponde a una aproximación discreta del sistema continuo (1), para el cual no es posible obtener un sistema discreto exacto.

Es evidente que el sistema (6) no corresponde con el comportamiento exacto de (3) en los instantes de muestreo debido al proceso de muestreo-retención (ficticio) aplicado a la señal intermedia.

El esquema de aproximación descrito corresponde con el que se introdujo al inicio de ésta sección y será utilizado en este trabajo considerando la clase de sistemas (1) la cual incluye retardos de tiempo en los estados y en la señal de entrada.

Como puede apreciarse, la aproximación utilizada consiste sustancialmente en la discretización de la señal intermedia en (4), la cual es pasada por un retenedor de orden cero (quantizando) como se muestra genéricamente en la Fig. 2.

Obsérvese que la aproximación considerada puede ser mejorada usando un retenedor de orden superior o inclusive de otro tipo, por ejemplo, lo que se conoce como retenedor triangular (Franklin y Powell, 1990). El efecto de este retenedor se muestra también en la Fig. 2.

Es importante notar también que entre menor sea el periodo de muestreo, mejor será la aproximación de la señal muestreada y que en el límite, cuando $T \rightarrow 0$, la aproximación será exacta.

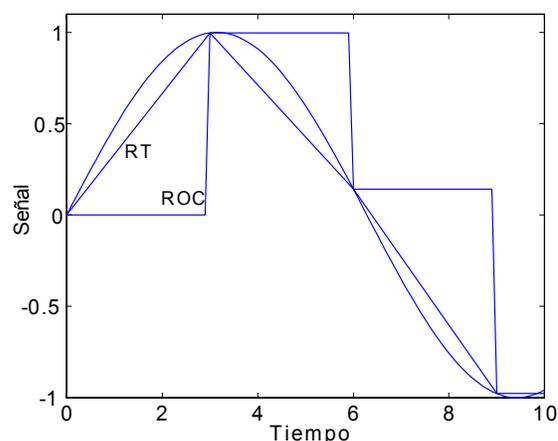


Fig. 2. Efectos del retenedor de orden cero (ROC) y del retenedor triangular (RT).

4. Aplicación a plantas con reciclado

Con el fin de mostrar tanto los detalles como la eficacia de la propuesta de modelado descrita anteriormente, en la presente sección se considerará su aplicación en un sistema con reciclado.

Si bien es cierto que un gran número de los procesos que involucran fenómenos de transporte pueden ser modelados satisfactoriamente por un simple primer orden en cascada con un tiempo muerto, esta representación no basta para sistemas complejos. Tal es el caso, por ejemplo, de las columnas de destilación en donde muchas etapas de equilibrio trabajan en conjunto para lograr el producto final.

El reciclo de material produce un efecto complicado que no puede ser modelado simplemente por un primer orden con retardo. Considere el efecto al ocurrir un cambio en el reciclo que llega al plato superior de la columna. Esto desplaza el material en el plato afectando la composición del vapor casi inmediatamente, lo que a su vez afecta el flujo y la composición del líquido que abandona el plato superior, produciendo un efecto en cascada para todos los platos de la columna.

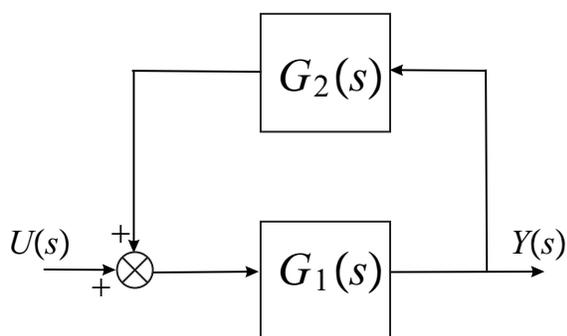


Fig. 3. Sistema de reciclo con dos unidades.

El reciclo de material es una técnica clásica usada para mejorar la calidad de una reacción química. En general, al efectuarse un reciclo, el material se separa a la salida y debe recorrer una tubería de determinada longitud, lo que involucra retardos de transporte adicionales. En este trabajo se abordará un ejemplo simple de un proceso con reciclo. Considérese el sistema con dos unidades que se muestra en la Fig. 3. La unidad del lazo directo consiste de una simple función transferencia de primer orden dada por:

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)}.$$

La salida de este sistema, $Y(s)$, es retroalimentada en la unidad de reciclo, la cual consiste también de una función

transferencia de primer orden pero con un retardo de 0.4 segundos, esto es:

$$G_2(s) = \frac{e^{-0.4s}}{(s+1)}.$$

Entonces, la función transferencia total del sistema esta dada por:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) & G_1(s)G_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

Donde $U(s)$ es la entrada de control. Equivalentemente, la función transferencia (7) puede describirse como,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1 - e^{-0.4s}}. \quad (8)$$

Observe que aun cuando el sistema (8) no presenta retardo en la señal de entrada, la metodología propuesta anteriormente contempla este caso particular. Por otra parte, el problema fundamental abordado en este trabajo, es la consideración de retardos de tiempo en los estados del sistema. A partir de la función de transferencia (8) es posible obtener directamente una representación en variables de estado de la forma descrita en (1) dada como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-0.4) \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t-0.4) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Considerando ahora el estado retardado como una señal de entrada independiente, esto es:

$$x(t - 0.4) = v(t - 0.4),$$

Donde

$$v(t - 0.4) = \begin{bmatrix} v_1(t - 0.4) \\ v_2(t - 0.4) \end{bmatrix}.$$

Se obtiene entonces el sistema alterno

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + u(t) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + v_2(t - 0.4), \end{aligned} \quad (10)$$

Donde $v_2(t)$ es la nueva entrada ficticia. La representación como función de transferencia del sistema (10) resulta ser,

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{e^{-0.4s}}{(s+1)(s+1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Considerando ahora un retenedor de orden cero y un periodo de muestreo de $T = 0.2$ segundos se obtiene la función de transferencia discreta para el sistema (11) dada por,

$$Y(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.181}{z - 0.818} & \frac{0.096(z + 0.875)}{(z - 0.818)z^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U(z) \\ V_2(z) \end{bmatrix}.$$

Finalmente, considerando $V_2(z) = Y(z)$ se obtiene la función de transferencia aproximada del sistema (7) dada por,

$$Y(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.181}{z - 0.818} & \frac{0.096(z + 0.875)}{(z - 0.818)z^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U(z) \\ Y(z) \end{bmatrix}$$

O equivalentemente:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{p_1(z)}{p_2(z)} \quad (12)$$

Donde,

$$\begin{aligned} p_1(z) &= 0.181z^3 - 0.148z^2 \\ p_2(z) &= z^4 - 1.637z^3 + 0.670z^2 \\ &\quad - 0.017z - 0.015. \end{aligned}$$

Esta representación aproximada servirá de base para obtener la estrategia de control.

En la Fig. 4 es posible apreciar el diagrama del lugar de las raíces correspondiente al modelo aproximado (12). En este caso, es simple verificar (mediante simulaciones) que los rangos de estabilidad entre el sistema real con retardos y el sistema discreto aproximado son muy similares.

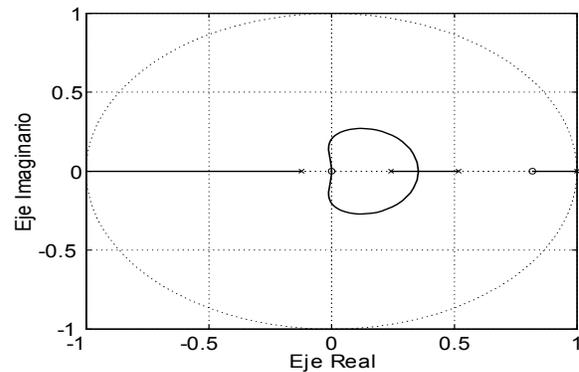


Fig. 4. Lugar de las raíces del modelo aproximado propuesto.

5. Estrategia de control y simulación en lazo cerrado

Una vez obtenido el modelo aproximado del sistema en tiempo discreto como una función racional en la variable compleja z , es posible la utilización de técnicas de control clásicas utilizadas en

sistemas lineales libres de retardo en la solución del problema planteado.

En este trabajo se considerará una técnica poco común, que se conoce como reubicación polinomial de polos (de Larminat, 1993). Esta técnica se basa en la consideración de una retroalimentación dinámica tan solo de la señal de salida, lo cual permite asumir que ésta es la única variable conocida. Asimismo, la técnica en cuestión permite al sistema seguir referencias de tipo escalón y al mismo tiempo rechazar perturbaciones del mismo tipo.

Considérese entonces que la aplicación de la metodología descrita en la Sección 3 produce el modelo dado por (12), al cual se le ha agregado una señal de perturbación a la entrada del mismo, esto es:

$$Y(z) = \frac{p_1(z)}{p_2(z)} [U(z) + Q(z)]$$

Donde $U(z)$ es la transformada z de la acción de control digital y $Q(z)$ la transformada z de una perturbación de tipo escalón. $p_1(z)$ y $p_2(z)$ son polinomios en la

variable compleja z .

Se debe mencionar que el rechazo de perturbaciones no es el objetivo de este trabajo y tan solo se aborda el problema para mostrar los posibles alcances de la metodología de discretización propuesta.

Nótese que en la obtención del modelo aproximado anterior los retardos de tiempo deben ser múltiplos del periodo de muestreo T , esto es $\tau = \alpha_1 T$ y $h = \alpha_2 T$ con α_1, α_2 enteros. Note también que el orden del modelo discreto es $\alpha + n$, con $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ y n la dimensión del sistema original.

La técnica de reubicación polinomial produce un controlador dinámico de la forma:

$$U(z) = \frac{R(z)}{S(z)} [M(z) - Y(z)] \tag{13}$$

Donde $M(s)$ es una nueva entrada de referencia y $R(z)$ y $S(z)$ polinomios en la variable z . En la Fig. 5 puede apreciarse un diagrama del esquema de control propuesto con referencia a la planta con reciclo descrita en la Fig. 3.

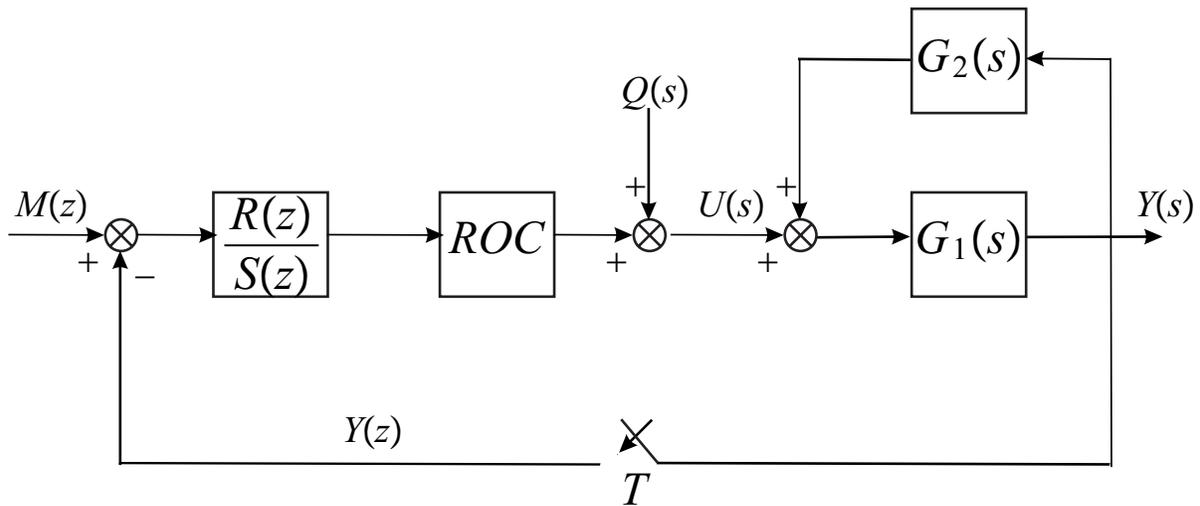


Fig. 5. Esquema de control digital propuesto.

El controlador discreto (13) que se describe anteriormente, puede ser obtenido de la siguiente manera (ver detalles en de Larminat, 1993):

- 1) $S(z)$ debe contener el término $(z-1)$ para asegurar que la perturbación de tipo escalón sea rechazada. Si $S(z) = (z-1)S_1(z)$, la ecuación característica del nuevo sistema retroalimentado es entonces $D(z) = p_2(z)(z-1)S_1(z) + p_1(z)R(z)$
- 2) $D(z)$ puede construirse libremente como un polinomio estable de orden $2(\alpha+n)+1$, lo que fijará los valores de los polinomios $S_1(z)$ y $R(z)$ y proporcionará un controlador $R(z)/S(z)$ estrictamente propio.

Es fácil verificar que la estructura de control propuesta es equivalente a un esquema de control por retroalimentación de estados estimados al que se ha agregado el efecto integrador, usando un observador de orden completo. Por lo tanto, el número de polos a reubicar será igual a dos veces el orden de la planta $(\alpha+n)$ mas uno.

Siguiendo los lineamientos anteriores y considerando el modelo discreto aproximado (12) es posible obtener fácilmente el siguiente controlador,

$$\frac{R(z)}{S(z)} = \frac{q_1(z)}{q_2(z)} \tag{14}$$

donde

$$q_1(z) = 4.761z^4 - 8.265z^3 + 5.569z^2 - 1.677z + 0.180$$

$$q_2(z) = z^5 - 1.562z^4 + 0.448z^3 + 0.255z^2 - 0.146z + 0.005$$

El cual reubica los polos del sistema completo en:

$$\{0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4\}.$$

En la Fig. 6 puede apreciarse la respuesta del sistema real (7) en lazo cerrado con el controlador (14) obtenido a partir de la aproximación discreta (12). Los experimentos se realizaron considerando una entrada escalón unitario así como una perturbación del mismo tipo aplicada en $t=10$ segundos. La respuesta del sistema ante estas condiciones es marcada como RP en la Fig. 6.

Con el fin de verificar la eficacia del modelo aproximado propuesto, adicionalmente se consideró el control del sistema (9) mediante un esquema Proporcional-Integral clásico diseñado a partir del diagrama del lugar de las raíces del modelo aproximado dado en la Fig. 4, este controlador esta dado por,

$$H(z) = \frac{2(z-0.9)}{z-1}.$$

Los resultados obtenidos se muestran también en la Fig. 6 mediante la marca PI.. A partir de los resultados mostrados en la Fig. 6, puede observarse como los controladores diseñados a partir del modelo aproximado obtenido siguiendo la propuesta de este trabajo funcionan adecuadamente dando un efectivo rechazo de perturbaciones y un tiempo de establecimiento adecuado. Cabe mencionar que la estrategia de control mediante la reubicación de polos es más

eficaz, lo cual no es sorprendente si observamos el orden del controlador correspondiente.

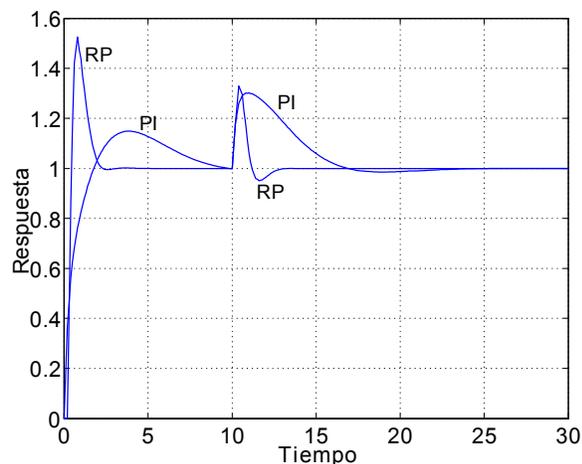


Fig. 6. Resultados en simulación del sistema en lazo cerrado.

Conclusiones

En este trabajo se aborda el problema de control para una clase de sistemas lineales con retardos de tiempo tanto en el estado como en la transferencia directa entrada-salida y se considera el caso particular de los sistemas con reciclo. Se propuso una metodología para la obtención de un modelo discreto cuyo comportamiento coincide con el del sistema original en forma aproximada en los instantes de muestreo. La metodología para la obtención del modelo discreto se aplica a un sistema particularmente difícil de controlar: un sistema con retardo en el reciclo. Para mostrar la utilidad de la aproximación obtenida, el modelo discreto se considera como base en el diseño un controlador basado en la reubicación de polos mediante retroalimentación dinámica de salida. Mediante simulaciones digitales se analiza la eficacia del controlador y consecuentemente la utilidad del modelo aproximado. Asimismo, el modelo discreto se utiliza en el diseño de un controlador de tipo PI tradicional. Los resultados muestran

que ambos controladores funcionan adecuadamente, aún cuando el de tipo PI tiene un tiempo de establecimiento sensiblemente superior al que se obtiene mediante la técnica de reubicación de polos.

Agradecimientos

Trabajo parcialmente apoyado por CONACyT-México. Proyecto J41859-Y

Referencias

- Arunawatwong, A. (1996). Stability of retarded delay differential systems, *International Journal Control*, 65, (2), 347-364.
- Astrom, K. J., Hang, C. C. y Lim, B. C. (1994). A new Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead time. *IEEE Transactions Automatic Control* 39, (2), 343-345.
- Conte, G. y Perdon, A. M. (1995). The disturbance decoupling problem for systems over a ring. *SIAM. Journal of Control and Optimization* 33, 750-764.
- De Larminat, P. (1993). *Automatique: commande des systèmes linéaires* Hermès, Paris, Francia.
- Driver, R. D. (1977). *Ordinary and delay differential equations*. Springer-Verlag, New York, EUA.
- Franklin, G. F. y Powell, D. (1990). *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, EUA.
- Górecki, A. y Fuksa, S. (1989). *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*. John Wiley & Sons. EUA.
- Iwai, Z., Seborg, D. E., Fisher, D. G. y Kobayashi, N. (1978). Decoupling of linear time variant systems with time delays in the control variable or state variable, *International of Journal of Control*. 28, (6), 869-888.
- Luyben, W. L. (2001). Effect of derivative algorithm and tuning selection on the PID control of dead-time processes. *Industrial Engineering Chemical Research*. 40, 3605-3611.
- Luyben, W. L. (1993). Dynamics and control of recycle systems. Simple open-loop and closed-loop systems. *Industrial Engineering Chemical Research*. 32, 466-475.

- Maza-Casas, L., Velasco-Villa, M. y Alvarez-Gallegos, Ja. (1999). On the state prediction of linear systems with time-delays in the input and the state. *38th IEEE Conference on Decision and Control*, 239-244.
- Malek-Zavarei, M. y Jamshidi, M. (1987). *Time-delay systems. Analysis, optimization and applications*, NorthHolland, Holanda.
- Mori, T. y Kokame, H. (1989). Stability of $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34, 460-462.
- Smith, O. J. M. (1957). Closer control of loops with deadtime, *Chemical Engineering Progress* 53, (5), 217-219.
- Tzafestas, S. G. y Paraskevopoulos, P. (1973). On the decoupling of multivariable control systems with time delays. *International Journal of Control* 17, (2), 405-415.
- Velasco-Villa, M. (2003). State prediction for a class of unstable time-delay systems, *Congreso de la Asociación de México de Control Automático*, 7-12, México.
- Wang, S. S. (1992). Further results on stability of $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$. *System and Control Letters* 19, 165-168.
- Watanabe, K. y Ito, M. (1981). Process-model control for linear systems with delay. *IEEE Transactions of Autmatization and Control AC-26*, 1261-1269.